

Dragan Stojić¹
Nedeljko Babić²
Nina Petković³

UDC 338.22
330.322.2:51-7
Originalni naučni rad
Primljen: 02. 09. 2019.
Prihvaćen: 23. 09. 2019.

PRIMENA MARKOVLJEVIH PROCESA U FINANSIJAMA

APSTRAKT: Period nakon globalne finansijske krize 2008. godine do danas karakteriše pojačana regulacija u svim sektorima, uz veliku pažnju analize rizika. Predviđanje budućih događaja postaje primarni cilj u svim segmentima, jer zaštita od rizika u savremenim uslovima poslovanja (česte promene tržišnih uslova) postaje centralni ključ uspeha. Korišćeni metod istraživanja podrazumeva kvalitativni istraživački dizajn, kao i analize određenih postojećih kvantitativnih istraživanja. Predmet istraživanja podrazumeva istraživanje široke primene Markovljevih procesa u sektoru finansija, u širem smislu. Vođeni ciljem ovog istraživanja, autori žele da identifikuju ključne metodološke segmente u kvalitativnom smislu, te u obelodanjivanju matematičkog instrumentarijuma ove oblasti. Očekivani rezultati istraživanja neće sadržati inovativne ili empirijske rezultate. Cilj je da se na jedan celovit način prikaže i ukaže na značaj Markovljevih procesa, odnosno njihovu široku primenu u sektoru finansija u sadašnjim uslovima poslovanja.

KLJUČNE REČI: stohastički procesi, Markovljevi procesi, finansije – primena

¹ Docent, Ekonomski fakultet u Subotici, Univerzitet u Novom Sadu.
E-mail: stojicd@ef.uns.ac.rs

² Doktorand, Ekonomski fakultet u Subotici, Univerzitet u Novom Sadu.
E-mail: nedeljkobbcc@gmail.com

³ Docent, Fakultet za menadžment Zaječar, Megatrend Univerzitet.
E-mail: nina.petkovic@fmz.edu.rs

1. Uvod

Predviđanje poslovanja određenog pojedinačnog poslovnog entiteta ili privrede nacionalne ekonomije od velike je važnosti za investicione aktivnosti koje su generator rasta i razvoja ekonomije jedne zemlje (Stanojević, Đorđević, Volf, 2017). U naučnoj literaturi novijeg datuma gotovo da nije moguće ne susresti se sa nekim oblikom naglasaka na riziku, kao ključnim za savremene tržišne uslove. Upravljanje rizikom postaje centralni zadatak svih donosilaca odluka. Aktivnosti planiranja budućih događaja postaju primarna preokupacija rukovodećih funkcija. Kao razlog tome, možemo navesti činjenicu da su samo šest meseci pre izbijanja globalne finansijske krize svi zvanični izveštaji Međunarodnog monetarnog fonda (MMF) bili, u najmanju ruku, obećavajući, pozitivni, bez naglasaka na bilo kakve ekstremne poremećaje u globalnim tokovima (Fabris, 2018). Tada vladajući opšti trend liberalne doktrine u potpunosti je „podbacio“. U današnjim uslovima povećane regulacije, tokom koje se svetska ekonomija još oporavlja od privrednog šoka koji je prouzrokovan pre više od deset godina, teži se u svim segmentima podrobnije predvideti svako buduće kretanje u privredi kako bi se blagovremeno mogle preduzeti akcije i svaki mogući negativni uticaj izbeći, ili makar minimizirati negativni efekti (Babić, Petković, Romić, 2019). Naučno polje finansijske matematike iznalazi mnoštvo rešenja pomoću kojih je moguće pravovremeno i pouzdano prognoziranje budućih stanja u savremenim uslovima poslovanja.

Bitno je napraviti razliku između determinističkih i stohastičkih procesa, budući da se jednačine primenljive na determinističke procese ne mogu lako primenjivati na stohastičke procese. Jednostavno rečeno, za varijablu, čija se vrednost menja tokom vremena na način koji ne prati neki predvidljiv (deterministički) šablon, kažemo da prati stohastički proces. U okviru tog procesa, razlikujemo diskretno i kontinuirano vreme, u zavisnosti od toga da li se promene dešavaju u određenim, fiksno definisanim momentima, ili se dešavaju kontinuirano. Stohastički procesi mogu obuhvatati diskretne varijable ili kontinuirane varijable, pri čemu posmatrane varijable mogu menjati vrednost samo u izvesnim diskretnim iznosima (Seneta, 2006; Kožul, 2017). Cene akcija, primera

radi, mogu menjati vrednost samo u unapred određenom iznosu. Uprkos tome, ovaj pristup se primenjuje u finansijskom modeliranju, jer omogućava korišćenje nekih ključnih koncepata prilikom utvrđivanja cena, čak i za najkompleksnije finansijske derivate. To su Markovljev, Vinerov i Itoov proces (Kožul, 2017, str. 59–90). U daljem radu predmet istraživanja odnosi se na primenu Markovljevih procesa u opštem kontekstu u oblasti finansija.

Za potrebe rešavanja kompleksnih ekonomskih problema, kada je ciljeve poslovanja moguće kvantitativno izraziti za donošenje optimalnih poslovnih odluka, koriste se različiti ekonomsko-matematički modeli. Zbog toga je to osnovni razlog zbog kojeg se poslednjih decenija posvećuje velika pažnja ispitivanju mogućnosti primene i razvoja različitih modela kvantitativne analize za potrebe ostvarivanja uspešnih rezultata u poslovanju. S obzirom na raznolikost zainteresovanih korisnika za buduće informacije, potrebno je standardizovati pokazatelje kako bi se oni mogli upoređivati s određenim standardnim veličinama, te se lakše razumeti i analizirati (npr. pokazatelji uspeha, cilj profita, i sl. (Hess, Fabian, Hess, 2008, str. 159).

Upravljanje rizikom podrazumeva, pre svega, potrebu da identifikujemo odgovarajuću količinu za merenje rizika. Retka su investiranja koja nemaju rizik (npr. ulaganje u garantovane državne obveznice, bez prava opoziva). Rizik je izuzetno nizak, ako je na primer stopa povraćaja uložених sredstava 20%, sa verovatnoćom ostvarenja od 99 %. U tom slučaju govorimo o izuzetno niskom riziku (Capinski, Zastawniak, str. 91). Međutim, nekada investitori ulažu i u visoko rizične finansijske instrumente, jer uglavnom takvi donose ekstremno visoke prinose, kao što su npr. *Junk* obveznice (eng. *junk bonds*) čiji su emitenti izuzetno nestabilne kompanije niskog kreditnog rejtinga. Često se u ekonomskim izrekama autori pozivaju da su „berza, ili tržište zapravo jedan veliki kazino“ u okviru kojeg je najteže predvideti buduće događaje, kao ključ uspeha (Dunbar, 2011).

Upravljanje finansijskim rizicima je nova kvantitativna disciplina čiji je razvoj počeo sedamdesetih godina prošlog veka uporedo sa prvim Bazelskim sporazumom između zemalja G10 koji je „pokrivao“ regulaciju bankarskog rizika. U proteklih četrdeset godina banke su počele da shvataju rizike koje one preuzimaju i ostvaren je značajan na-

predak, posebno u oblasti tržišnih rizika. Pri tome, dostupnost tržišnih podataka i podsticaj za smanjenje regulatornih kapitalnih troškova kroz odgovarajuću procenu rizika pružili su katalizator za razvoj softvera za upravljanje tržišnim rizicima. Danas ovaj softver koriste ne samo banke, već i „hedž“ fondovi, osiguravajuća društva, korporativne kompanije i sl. (Alexander, 2008).

2. Stohastički procesi

U okviru ove tačke analiziramo teorijski aspekt i opšti matematički izraz stohastičkog procesa, kao primarno polazište ka dubljoj analizi Markovljevih modela u oblasti finansija. Određeni matematički izrazi predstavljeni su kao polazni instrumentarijum, a složeniji izrazi u daljim tačkama rada biće dopunjeni prilikom analize postojećih kvantitativnih istraživanja.

2.1. Teorijski aspekt

Analize vremenskih serija preko probabilističkih modela „utrole“ su put teoriji stohastičkih procesa (Rašeta, 2009). Pod **stohastičkim procesom** podrazumevamo slučajnu (stohastičku) komponentu u vremenskoj seriji koja je sastavni deo njene fizičke vrednosti. U **teoriji rizika**, pored poznavanja matematičkih metoda, potrebno je i poznavanje prirode rizika, odnosno pojave koja se analizira. Složene tehnike analize često mogu biti zamenjene prostijim analizama (str. 298).

Modeliranje velikog broja sistema zahteva slučajne parametre. Takvi modeli često nastaju iz problema gde nemamo dovoljno informacija o vrednostima parametara koji se pojavljuju (npr. u ekonomiji). Kako analizirati kada ne znamo kako tačno izgledaju neki parametri? Jedna od mogućnosti je da koristimo prilaz stohastičke analize i da posmatramo te parametre kao slučajne objekte. Druga mogućnost za prevazilaženje ovog problema mogla bi biti zamena nepoznatih parametara nekom vrstom prosečnih vrednosti i rad sa odgovarajućim determinističkim sistemom uz nadu da je to dovoljno „dobra“ aproksimacija polaznog problema. Tokom proteklog veka sve češće su korišćene metode

stohastičke analize. Takav pristup se veoma brzo razvijao i sada predstavlja važan alat u mnogim oblastima (Nedeljković, 2011, str. 11).

2.2. Matematički izraz

Zamislimo da se u svakom trenutku t vremenskog intervala I posmatra neka karakteristika X fizičkog sistema, a da je pri tome ta karakteristika slučajna (Pardoux, 2008). Možemo reći da je $X(t)$ slučajna promenljiva, za $t \in I$. To znači da na skup svih slučajnih promenljivih $X(t)$, $t \in I$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno slučajnu funkciju vremena. Tada je za nas $X(t)$ jedan slučajni ili stohastički proces. Sada ćemo navesti i formalnu definiciju. Neka I označava proizvoljan neprazan skup i neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoće (Nedeljković, 2011).

Definicija 1: Familija $\{X_t : t \in I\}$ \mathbf{R}^d - vrednosnih slučajnih promenljivih se zove stohastički (slučajan) proces sa parametarskim (indeksnim) skupom I i prostorom stanja \mathbf{R}^d (Ulm University, 2019). Ako je parametarski skup konačan tada jednostavno imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je taj skup prebrojiv govorimo o nizu slučajnih promenljivih. Izraz „proces“ najčešće koristimo u slučaju kada parametarski skup nije prebrojiv.

Definicija 2: Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je $X_t(\cdot)$ \mathbf{R}^d - vrednosna slučajna promenljiva za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$. Tu slučajnu promenljivu nazivamo zasek ili sečenje stohastičkog procesa.

Definicija 3: Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ \mathbf{R}^d - vrednosna funkcija na $[t_0, T]$ i zove se staza (trajektorija) slučajnog procesa (Nedeljković, 2011, str. 11).

U nastavku sledi detaljnija analiza Markovljevog procesa, kao posebnog tipa stohastičkog procesa.

3. Markovljevi modeli

U okviru ove tačke analiziramo teorijske osnove i primenu Markovljevih modela, zatim osnovne matematičke izraze u pojedinim primenama u oblasti finansija.

3.1. Teorijske osnove i primena

Finansijska analiza počinje izgradnjom finansijskih modela. Model je veštačka ili idealizovana struktura koja opisuje odnose između varijabli ili faktora (Hasan, Teall, 2002).

Markovljevi modeli predstavljaju stohastičke modele pomoću kojih je moguće predviđanje verovatnoća ostvarenja budućih događaja na bazi poznatih sadašnjih verovatnoća. Takvi modeli su dobili naziv po njihovom autoru, ruskom matematičaru, Andreju Markovu (eng. *Andrei Andreyevich Markov*), koji je izučavajući određene klase stohastičkih procesa definisao posebnu grupu tzv. Markovljeve stohastičke procese (Kenton, 2018) i na njima zasnovane Markovljeve modele i lance. Teorija verovatnoće je centralna tema u matematici (Knill, 2009, str. 16).

Markovljev proces je poseban tip stohastičkog procesa u kom naredna vrednost varijable zavisi samo od njene trenutne vrednosti (Kožul, 2017, str. 59–60). Može se pretpostaviti da je ona uslovno nezavisna od svih prethodnih vrednosti date varijable. U svakom drugom koraku koriste se nove relevantne informacije, kako bi se donela sledeća odluka i tako dalje. Dakle, nije relevantno kako smo dostigli specifično stanje, jer sve što možemo da uradimo jeste da iz njega krenemo dalje koristeći raspoložive podatke. Markov je prvi rad na ovu temu pripremio 1906. godine (objavio ga je 1907. godine) i u njemu je razmatrao lance sa dva stanja – 0 i 1, iako su ovakvi procesi bili primenjivani i ranije (Basharin, Langville, Naumov, 2004). Recimo, slučajna šetnja po brojnoj osi i problem propasti kockara, kao dva primera Markovljevih procesa u diskretnom vremenu, izučavani su stotinama godina pre njega. S druge strane, najpoznatiji Markovljevi procesi u kontinuiranom vremenu jesu Vinerov proces, poznat i kao Braunovo kretanje, i Poasonov proces, pri čemu su ova dva procesa otkrivena nezavisno, u različitim kontekstima. Ovo ima primenu prilikom utvrđivanja cena jedno-

stavnih opcija na akcije, ali se, takođe, u velikoj meri koristi i u ekologiji, hemiji, fizici, psihologiji i sl.

Markovljeva analiza ima široku **primenu** u ekonomiji: u marketingu (predviđanje strukture tržišta, razvoja marki proizvoda), u finansijama (upravljanje i predviđanje kreditnih aranžmana, predviđanje stanja potraživanja, rizik ulaganja u pojedine hartije od vrednosti i sl.), u menadžmentu (analiza produktivnosti zaposlenih), u upravljanju ka-drovima, u osiguranju (rizičnost portfelja) i slično (Myers, Wallin, Wikström, 2017; i Hilgers, Langville, 2003).

Za predviđanje stanja nekog sistema u budućnosti primenom Markovljevih modela neophodan **uslov** je poznavati njegovo stanje u početnom periodu. Predviđanje budućeg kretanja, odnosno izmene stanja posmatranog sistema podrazumeva poznavanje verovatnoća prelaska sistema iz jednog u drugo stanje u određenom posmatranom vremenskom periodu. Verovatnoće izmene stanja sistema uglavnom su predstavljene u obliku matrice verovatnoća, čiji elementi pokazuju verovatnoće izmene sistema iz jednog u drugi period (Beasley, 2019; i Backović, Vuleta, Popović, 2011).

Markovljeva analiza i predviđanje zasnivaju se na ispunjenosti sledećih pretpostavki (Backović, Vuleta, Popović, 2011):

- Stanje sistema u nekom periodu zavisi isključivo od njegovog stanja u neposredno prethodnom periodu;
- Veličina sistema i broj elemenata ostaju nepromenjeni u toku perioda za koji se vrši predviđanje;
- Matrica prelaznih verovatnoća je stacionarna tj. ne menja se u toku perioda predviđanja.

Prethodne pretpostavke primene Markovljevih modela podrazumevaju da različita stanja u kojima se neki sistem može naći istovremeno opisuju kompletan sistem i međusobno se isključuju. Ova osobina podrazumeva da navedena stanja jesu jedina moguća u kojima se posmatrani sistem može naći, kao i da se sistem u jednom trenutku ne može istovremeno naći u dva stanja – međusobna isključenost (str. 597–598).

3.2. Osnovni matematički izrazi

Informacije o stanju sistema u određenom vremenskom periodu, koji je početni period za predviđanje stanja sistema, **moгу se predstaviti vektorom stanja sledećeg oblika** (Backović, Vuleta, Popović, 2011):

$$S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)) \quad (1)$$

$S(t)$ je vektor stanja sistema u t -periodu, dok su $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$ verovatnoće da će se sistem naći u jednom od n mogućih stanja u tom periodu (Bäuerle, Rieder, 2011).

Prelazak sistema iz jednog u drugo stanje u dva uzastopna perioda možemo predstaviti odgovarajućim verovatnoćama prelaza. Ako verovatnoća P_{ij} predstavlja uslovnu verovatnoću prelaza sistema iz i -tog u j -to stanje u periodu $(t, t+1)$, odnosno verovatnoću da će se sistem koji se u periodu t nalazio u i -tom stanju u narednom periodu $(t+1)$ naći u j -tom stanju. Ove verovatnoće formiraju matricu prelaznih verovatnoća koja je specifična za svaki Markovljev lanac (Tourki, 1986). U uslovima postojanja n mogućih stanja, sve verovatnoće izmene možemo predstaviti u vidu matrice verovatnoće sledećeg oblika:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Matrica P predstavlja Markovljevu tranzitivnu matricu koja sadrži sve verovatnoće prelaza sistema iz jednog u drugo stanje u datom periodu $(t, t+1)$. Elementi koji se nalaze na glavnoj dijagonali matrice P predstavljaju verovatnoće da sistem nakon isteka vremenskog intervala neće menjati stanje iz prethodnog perioda, dok ostale verovatnoće pokazuju verovatnoće ostvarenja izmene stanja sistema u posmatranom vremenskom periodu. S obzirom na navedene karakteristike, verovatnoća koja predstavlja sastavne elemente matrice P , zbir njihovih vrednosti po vrstama jednak je jedinici, odnosno:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{ij} &= 1 & 0 \leq p_{ij} &\leq 1 & \text{za svako } i, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n p_{ij} &= 1 & 0 \leq p_{ij} &\leq 1 & \text{za svako } i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

Kako smo prethodno naveli, glavni cilj primene Markovljevih modela je predviđanje stanja sistema za neki budući period, odnosno za niz sukcesivnih vremenskih perioda. Kada raspoložemo vektorom inicijalnog stanja sistema tj. vektorom $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ i odgovarajućom tranzitivnom matricom P , stanje sistema za neki naredni period može se predvideti na sledeći način:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= S(t)P \\ S(t+2) &= S(t+1)P = S(t)P^2 \\ S(t+3) &= S(t+2)P = S(t)P^3 \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ S(t+\tau) &= S(t+\tau-1)P = S(t)P^\tau \end{aligned} \quad (4)$$

S obzirom na stacionarnost Markovljeve tranzitivne matrice (osobine stacionarnosti Markovljevog stohastičkog procesa), nakon određenog perioda doći će do tzv. uravnotežavanja stanja posmatranog sistema, odnosno sistem će se u dva različita perioda naći u istom stanju (Tourki, 1986; prema Backović, Vuleta, Popović, 2011, str. 599). Ostvarenje ravnotežnog stanja sistema s obzirom na način predviđanja predstavljen prethodnim relacijama može se predstaviti na sledeći način:

$S(r) = S(r)P$ gde je sa $S(r) = (S_1(r), S_2(r), \dots, S_n(r))$ obeležilo ravnotežno stanje sistema koje će biti ostvareno nakon isteka određenog broja perioda. Na taj način, metodološki posmatrano, poznavajući Markovljevu tranzitivnu matricu može se rešavanjem odgovarajućeg sistema jednačina odrediti ravnotežno stanje posmatranog sistema. Na osnovu prethodne relacije, u slučaju postojanja n mogućih stanja sistema imamo (str. 597–598):

$$(S_1(r), S_2(r), \dots, S_n(r)) = (S_1(r), S_2(r), \dots, S_n(r)) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

odnosno ako jednostavnije zapisano prihvatimo da je $S_i(r) = S_i$ sistem jednačina čijim rešavanjem se može utvrditi ravnotežno stanje sistema biće:

$$S_1 = S_1p_{11} + S_2p_{21} + \dots + S_np_{n1}$$

$$S_2 = S_1p_{12} + S_2p_{22} + \dots + S_np_{n2}$$

.....

$$S_n = S_1p_{1n} + S_2p_{2n} + \dots + S_np_{nn} \quad (6)$$

Prethodni sistem jednačina omogućava da na bazi poznate, empirijski utvrđene matrice prelaznih verovatnoća sistema utvrdimo njegovo ravnotežno stanje koje će biti ostvareno nakon isteka određenog relativno dužeg vremenskog perioda (Backović, Vuleta, Popović, 2011, str. 599–600; i Levin, Peres, Wilmer, 2008).

Kako navodi Hess, dobijanje rešenja Markovljevog modela uključuje tri bitna koraka (Hess, 2004, str. 29–35):

- **Postavljanje modela** – određivanje stanja sistema, prelaza između tih stanja i verovatnoća prelaza;
- **Izvođenje jednačina** – stanje iz prvog koraka treba pretvoriti u sistem linearnih diferencijalnih jednačina. Kritika ovog koraka je da je izvođenje jednačina složen, dugotrajan i podložan greškama proces, kada su u pitanju Markovljevi modeli sa četiri i više stanja, što možemo komentarisati kao nedostatak ove metode, mada praksa pokazuje da se komparativnom metodom s nekim drugim matematičkim modelima može doći do detaljnije analize predviđanja (Pukite i Pukite, 1998). U zavisnosti od informacija, rezultati mogu biti slični ili pokazati neznatna odstupanja u odnosu na Markovljev model. Svakako, složena predviđanja podrazumevaju provere i komparacije sa više od jednog modela analize;
- **Rešavanje jednačina stanja Laplaceovim transformacijama** – treći korak, prema Hesovom istraživanju, za rešavanje jednači-

na stanja je Laplaceovim transformacijama (Hess, 2004, str. 37). Markovljev model rezultira s linearnim diferencijalnim jednačinama za verovatnoće stanja. Ove jednačine treba rešiti, da bi se dobile konačne verovatnoće stanja.

Za računarsku podršku Markovljevih lanaca postoje različiti računarski programi. Jedan od njih je *Matlab* koji složen postupak rešavanja diferencijalnih jednačina može skratiti i pojednostaviti (Janićijević, 2016, str.102).

4. Primena Markovljevih modela

U okviru četvrte tačke rada analiziramo neke od postojećih kvantitativnih istraživanja u ovoj oblasti. Takođe, kvalitativnim pristupom analiziramo primenu Markovljevih procesa u naučnim radovima novijeg datuma i prognoziiranju istih u finansijskom sektoru.

4.1. Primena modela za određivanje stanja potraživanja – analiza kvantitativnog primera

Pored autora koji navode primere primene u finansijama raznih modela predviđanja (Backović, Vuleta, Popović, 2011), koji se temelje na Markovljevim procesima, u nastavku dajemo pregled primene modela za određivanje naplativosti potraživanja u budućem periodu.

Primer 1: U ovom primeru elementi Markovljeve matrice predstavljaju verovatnoće izmene stanja potraživanja u roku od 30 dana, kao i da je matrica stacionirana. Pretpostavke u primeru su sledeće: verovatnoća da će potraživanja biti naplaćena u roku od 30 dana iznosi 0,50 a verovatnoća da će ova potraživanja biti nenaplativa iznosi 0. Verovatnoća zadržavanja potraživanja u stanju potraživanja do 30 dana iznosi 0,20, dok verovatnoća da će ova potraživanja preći u stanje naplativosti u roku 30–90 dana iznosi 0,30. Za potraživanja s rokom dospeća 30–90 dana pretpostavljaju se sledeće vrednosti prelaznih verovatnoća: $P_{41} = 0,45$;

$$P_{42} = 0,10 ; P_{43} = 0,15 ; P_{44} = 0,30.$$

Na osnovu prethodnih informacija, Markovljevu matricu prelaznih verovatnoća možemo predstaviti u obliku:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,20 & 0,30 \\ 0,45 & 0,10 & 0,15 & 0,30 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ako je poznata struktura potraživanja po navedenim kategorijama u bilo kom trenutku, može se, koristeći navedenu matricu prelaznih verovatnoća, jednostavno izvršiti predviđanje ovog stanja za naredni mesec. Kako bi se odredila fundamentalna matrica, u ovom primeru će se izvršiti podela prethodne matrice P na prethodno opisan način i biće:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,50 & 0 \\ 0,45 & 0,10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,30 \\ 0,15 & 0,30 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Fundamentalna matrica biće $F = (I - B)^{-1}$ odnosno

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,20 & 0,30 \\ 0,15 & 0,30 \end{bmatrix}^{-1} \right\}$$

$$\text{odakle imamo } F = \begin{bmatrix} 0,80 & -0,30 \\ -0,15 & 0,70 \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

Nakon određivanja inverzne matrice dobijamo

$$F = \begin{bmatrix} 1,32 & 0,57 \\ 0,28 & 1,51 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ukoliko ovako određenu fundamentalnu matricu pomnožimo sa matricom A , koja je dobijena iz Markovljeve matrice prelaznih vero-

vatnoća, mogu se odrediti konačne verovatnoće prelaza potraživanja, odnosno potraživanja sa rokom dospeća do 30 i 30–90 dana u jedno od prva dva finalna stanja – otpisana ili naplaćena potraživanja. U datom primeru imamo:

$$K = FA = \begin{bmatrix} 1,32 & 0,57 \\ 0,28 & 1,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,50 & 0 \\ 0,45 & 0,10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,85 & 0,15 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Elementi prve vrste matrice **K** pokazuju verovatnoće naplativosti potraživanja sa rokom dospeća do 30 dana. Primer pokazuje da verovatnoća da će ova potraživanja biti naplaćena iznosi 0,94, što bi značilo da će 94% iznosa potraživanja biti naplaćeno. Verovatnoća da će ova potraživanja biti otpisana iznosi 0,06, što znači da se može očekivati da će samo 6% ukupnog iznosa ovih potraživanja ostati nenaplaćeno. Elementi druge vrste, koji pokazuju konačne verovatnoće naplativosti potraživanja sa rokom dospeća 30–90 dana, imaju slično tumačenje, odnosno očekuje se da će 85% ovih potraživanja biti naplaćeno, dok 15% da će biti nenaplaćeno. Naredna pretpostavka primera je: ako preduzeće u određenom trenutku raspolaže sa 10.000 dinara potraživanja sa rokom dospelosti do 30 dana i 40.000 dinara sa rokom dospelosti 30–90 dana tj. ukoliko je $\bar{x} = (10.000, 40.000)$ iznos potraživanja koji će biti naplaćen (otpisan) na kraju perioda od 30 dana dobija se iz proizvoda:

$$= K \cdot \bar{x} = (10.000, 40.000) \begin{bmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,85 & 0,15 \end{bmatrix} = (43.400, 6.600) \quad (12)$$

(Backović, Vuleta, Popović, 2011, str.610)

Konačno, na prezentovanom primeru možemo zaključiti da se od ukupnog iznosa potraživanja tj. 50.000 dinara može očekivati da će 43.400 dinara biti naplaćeno, dok će 6.600 dinara potraživanja biti otpisano, odnosno nenaplativo. Na osnovu preglednog primera navedenih autora, takođe možemo primetiti da su prethodne analize primenljive u **kratkom roku** predviđanja (30 ili do 90 dana).

4.2. Prognoza kretanja prinosa akcija Beogradske berze

Prema istraživanju (Petković, 2016) ponašanja prinosa akcija na Beogradskoj berzi, čija je osnova teorija Markovljevih lanaca, daljim skraćenim pregledom ovog istraživanja moći ćemo da zaključimo koliki je značaj primene ove teorije u predviđanju kretanja prinosa akcija na finansijskom tržištu. Kretanje prinosa akcija u budućnosti imaće direktan uticaj na odluke potencijalnih investitora tokom njihovih investicionih aktivnosti.

Primer 2: Analizirano je po 252 vrednosti stanja za svaku od izabranih kompanija a cene njihovih akcija posmatrane su prema indeksu BELEX. S obzirom na ogroman broj podataka u njihovoj obradi korišćene su odgovarajuće softverske aplikacije u *Excelu* i programu *MATLAB*.

Tabela 1. Kompanije koje su korišćene u istraživanju

Oznaka	Naziv kompanije
NIS	Naftna industrija Srbije a. d. Novi Sad
FITO	Galenika Fitofarmacija a. d. Zemun
GMON	Goša montaža a.d. Velika Plana
AERO	Aerodrom Nikola Tesla a. d. Beograd
KMBN	Komercijalna banka a. d. Beograd
VZAS	Veterinarski zavod Subotica a. d. Subotica
IMLK	Imlek a. d. Beograd
IMPL	Impol Seval a. d. Sevojno
BMBI	Bambi a. d. Požarevac
MTLC	Metalac a. d. Gornji Milanovac

Izvor: Petković, 2016, str.54.

Prema podacima sa Berze, koji sadrže cene akcija određenog dana za svaku od kompanija, izračunavan je prinos koji dalje označavamo sa $r_i(t)$ gde je t parametar vremena. Formula koja daje iznos prinosa u danu t glasi:

$$r_i(t) = \ln \frac{P_i(t) P_i(t)}{P_i(t-1)P_i(t-1)} \quad (13)$$

gde $r_i(t)$ označava cenu akcija u danu t , gde $t \in \{1,2,\dots,252\}$ za svaku kompaniju $i \in \{1,2,\dots,10\}$. Nakon prikupljanja podataka izvršena je ras-

podela u nekoliko stanja neophodnih za primenu teorije Markovljevih lanaca. Na taj način dobili smo podatke koji su od značaja za potencijalne investitore a koji se odnose na kretanje vrednosti akcija pojedinih kompanija, čime investitori dobijaju odgovarajuću informaciju o firmi u čije je akcije optimalno investiranje tj. investitor bi ostvario najveći profit. Takva situacija se trenutno događa sa pojedinim akcijama srpskih kompanija, gde čak međunarodni savetnici i finansijske institucije nekim investitorima predlažu ulaganje u akcije srpskih kompanija s obzirom na političku stabilnost i rast BDP-a. Tako je Evropska banka za razvoj dala izjavu i preporuku potencijalnim investitorima da bi bilo bolje kupljene akcije u nekim drugim zemljama zameniti akcijama u Srbiji ili Mađarskoj, kao zemljama sa rastom BDP-a i sa sigurnošću investiranja.

Analiza prinosa, koji se dobijaju promenom cena akcija na Beogradskoj berzi, pokazala je da nema mnogo bitnih promena i da svi prinosi mogu da se klasifikuju u tri reprezentativna stanja. U tom smislu, sa S_1 ćemo označiti stanje kom pripadaju prinosi koji su manji od $-0,5\%$. Sa S_2 ćemo označiti stanje u kom se nalaze svi prinosi koji se kreću u intervalu $[-0,5\% +0,5\%]$ a dobijaju se u slučaju kada se cene akcija u datom trenutku ne razlikuju mnogo od cena istih akcija u nekom prethodnom trenutku t_{i-1} . Na kraju, u stanju S_3 nalaze se svi prinosi koji su veći od $+0,5\%$.

Dalje, za svaku firmu je potrebno odrediti koliko prinosa sadrži svako od navedenih stanja, odnosno S_1 , S_2 i S_3 . Nakon toga treba izračunati verovatnoću s kojom se akcije nalaze u jednom od datih stanja. Te verovatnoće, u suštini, predstavljaju relativne frekvencije koje se izračunavaju kao odnos broja prinosa koji se nalazi u S_1 , S_2 ili S_3 i ukupnog broja prinosa koji u našem slučaju iznosi 252.

U Tabeli 2. prikazani su podaci o broju prinosa koji pripadaju nekom od stanja S_1 , S_2 ili S_3 za svaku od posmatranih kompanija koje su navedene i u Tabeli 1.

Tabela 2. Raspodela prinosa i vrednosti inicijalnih vektora

Naziv	S_1	S_2	S_3	Vektor S_0		
NIS	64	129	59	0,253968	0,5511905	0,234127
FITO	40	156	56	0,158730	0,619048	0,222222
GMON	25	200	27	0,099206	0,793651	0,107143
AERO	81	89	82	0,321429	0,353175	0,325397
KMBN	64	146	42	0,253968	0,579365	0,166667
VZAS	27	204	21	0,107143	0,809524	0,083333
IMLK	36	189	27	0,142857	0,75	0,103175
IMPL	28	198	26	0,111111	0,785714	0,103175
BMBI	13	232	7	0,051587	0,920635	0,027778
MTLC	33	185	34	0,130952	0,734127	0,134921

Izvor: Petković, 2016, str.56.

Navedene vrednosti u prethodnoj tabeli, takođe, predstavljaju i raspodele verovatnoća; prinosi se nalaze u nekom od razmatranih stanja a to su, prema teoriji Markova, u stvari koordinate vektora S_0 . Svaka od verovatnoća p_{ik} , gde $i \in \{1,2,3\}$ a $k \in \{1,2,\dots,10\}$ dobija se kao količnik prinosa f_i koji se nalazi u stanju S_i i sume svih prinosa kojih ima 252 tj. važi formula:

$$p_{ik} = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^3 f_i} \frac{f_i}{\sum_{i=1}^3 f_i} \quad (14)$$

Dakle, početni vektor stanja $S_0 = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ za kompaniju NIS, na osnovu navedene formule, ima sledeće koordinate: $S_0 = [0,253968 \ 0,511905 \ 0,234127]$.

Na osnovu prethodnog razmatranja, možemo dati interpretaciju vektora tj. prognozu kretanja prinosa akcija kompanije NIS. Na osnovu verovatnoće $p_1 = 0,253968$ možemo tvrditi da su prinosi kompanije NIS manji od -0,5% na osnovu verovatnoće $p_2 = 0,511905$ možemo reći da se prinosi akcija nalaze u intervalu $[-0,5\%, +0,5\%]$, dok na osnovu verovatnoće $p_3 = 0,234127$ možemo zaključiti da su prinosi NIS-a veći od 0,5%. Na potpuno isti način interpretiramo koordinate vektora S_0 za ostale kompanije koje smo istraživali, a koje su navedene u Tabeli 1. Dalje, primenjujemo metodu Markovljevih lanaca i na sve ostale kompanije na potpuno analogan način kao i za NIS. Matrica, koja sadrži broj prelaza, u ovom slučaju glasi:

$$S = \begin{bmatrix} 26 & 25 & 13 \\ 28 & 79 & 22 \\ 9 & 26 & 24 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Svaki element s_{ij} u matrici S pokazuje broj prinosa koji iz stanja i prelaze u stanje j . Očigledno, po glavnoj dijagonali matrice S nalazi se broj prinosa koji ostaju u istom stanju. Na osnovu ovih podataka, izračunava se matrica prelaza P koja sadrži prelazne verovatnoće koje se dobijaju kao relativne frekvencije tj. element p_{ij} matrice P predstavlja odnos broja prelaza prinosa iz i -tog stanja u stanje j i ukupnog broja prinosa. Na ovaj način, za kompaniju NIS matrica P ima sledeći oblik:

$$S = \begin{bmatrix} 0,40625 & 0,390625 & 0,203125 \\ 0,217054 & 0,612403 & 0,170543 \\ 0,152542 & 0,440678 & 0,40678 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Matrica prelaza P , prema teoriji Markova, ima osobinu da je suma u svakoj vrsti jednaka 1 tj.

$$\sum_{j=1}^3 P_{ij} = 1 \quad ; \quad \text{gde je } i = 1,2,3 \quad (17)$$

Na potpuno isti način izračunavaju se i matrice prelaza P za ostale kompanije iz Tabele 1. Sada prema formuli:

$s(t) = s(0) \cdot P^t$, $t \geq 1$ gde je $S(0) = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$ vektor stanja sistema u početnom vremenskom trenutku $t = 0$; izračunavamo vektor S_1 u prvom narednom periodu i dobijamo:

$$S_1 = [0,25 \ 0,5159 \ 0,2341].$$

Dalje, prema teoriji Markova imamo:

$$I-P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,40625 & 0,390625 & 0,203125 \\ 0,217054 & 0,612403 & 0,170543 \\ 0,152542 & 0,440678 & 0,40678 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,59375 & -0,390625 & -0,203125 \\ -0,217054 & 0,387597 & -0,170543 \\ -0,152542 & -0,440678 & 0,59322 \end{bmatrix}$$

pa na osnovu:

$$s^* = s^* \cdot P \text{ ó } s^* \cdot (I - P) = 0 \quad (19)$$

gde je I – jedinična matrica reda n . Jednačine koje se dobijaju nazivaju se ergodične jednačine i omogućavaju uz korišćenje dodatnog uslova:

$$\sum_{i=1}^n p_i^* = 1 \sum_{i=1}^n p_i^* = 1 \quad (20)$$

nalaženje ergodičnih verovatnoća $p_i^* p_i^*$. Sada formiramo sistem ergodičnih jednačina:

$$0,59375 p_1^* p_1^* - 0,217054 p_2^* p_2^* - 0,152542 p_3^* p_3^* = 0$$

$$-0,390625 p_1^* p_1^* + 0,387597 p_2^* p_2^* - 0,440678 p_3^* p_3^* = 0$$

$$-0,203125 p_1^* p_1^* - 0,170543 p_2^* p_2^* + 0,59322 p_3^* p_3^* = 0 \quad (21)$$

Na osnovu toga konačno dobijamo ergodični vektor s^* čije su koordinate ergodične verovatnoće:

$$s^* = [0,2491 \ 0,5170 \ 0,2339] . \quad (22)$$

Interpretirajući vektor (22), možemo dati prognozu sa verovatnoćom $p_1^* p_1^* = 0,2491$ da će u budućnosti prinosi akcija kompanije NIS biti manji od -0,5%, sa verovatnoćom $p_2^* p_2^* = 0,5170$ prinosi akcija NIS-a kretaće se u intervalu $[-0,5 \ +0,5]$, dok će prinosi akcija sa verovatnoćom $p_3^* p_3^* = 0,2339$ biti veći od 0,5%.

Na potpuno isti način izvršena je i analiza svih ostalih kompanija iz Tabele 1. i dobijeni su odgovarajući vektori distribucija verovatnoća u prvom periodu, kao i ergodični vektori koji su prikazani za svaku kompaniju posebno u Tabeli 3.

Tabela 3. Vektori distribucija u prvom narednom periodu i ergodični vektor stanja za sve posmatrane kompanije.

Naziv	Vektor	S_1	S_2	S_3
NIS	S_1	0,2500	0,5159	0,2341
	S^*	0,2491	0,5170	0,2339
FITO	S_1	0,1587	0,6151	0,2262
	S^*	0,1592	0,6141	0,2267
GMON	S_1	0,1032	0,7897	0,1071
	S^*	0,1029	0,7894	0,1077
AERO	S_1	0,3241	0,3532	0,3254
	S^*	0,3214	0,3532	0,3254
KMBN	S_1	0,2540	0,5833	0,1627
	S^*	0,2537	0,5850	0,1614
VZAS	S_1	0,1071	0,8135	0,0794
	S^*	0,1066	0,8157	0,0777
IMLK	S_1	0,1389	0,7540	0,1071
	S^*	0,1381	0,7552	0,1068
IMPL	S_1	0,1111	0,7857	0,1032
	S^*	0,1111	0,7857	0,1032
BMBI	S_1	0,0516	0,9206	0,0278
	S^*	0,0516	0,9206	0,0278
MTLC	S_1	0,1310	0,7341	0,1349
	S^*	0,1310	0,7341	0,1349

Izvor: Izvor: Petković, 2016, str. 59.

Analizom rezultata iz Tabele 3. možemo izdvojiti četiri kompanije (od njih deset koje smo istraživali) kod kojih je verovatnoća da se prinosi nalaze u stanju S_3 veća od verovatnoće da se nalaze u stanju S_1 (str. 43–60). To su FITO, GMON, AERO i MTLC. Dakle, na osnovu analize o kretanju prinosa akcija izabranih kompanija teorijom Markov-

ljevih lanaca dobijeni su rezultati koji bi bili interesantni za potencijalne investiture u donošenju odluka u koju kompaniju treba investirati. Naravno da su to one kompanije čiji su prinosi veći od 0,5% (Petković, Božinović, Stojanović, 2018). Na kraju, moramo istaći činjenicu da metodologijom Markovljevih lanaca nije opisan rizik od ulaganja u pojedine kompanije, te je to možda i nedostatak ove metode.

Drugi matematički modeli u ekonometriji koji uključuju i problem rizika znatno su komplikovaniji za primenu, pre svega zbog broja parametara koje uključuju u svoj model (Petković, 2016, str. 60). Međutim, kada se napravi komparativna analiza rezultata dobijenih drugim ekonometrijskim metodama, lako se vidi da se dobijeni rezultati veoma malo razlikuju (prethodno navedeno može biti polazna pretpostavka budućih kvantitativnih istraživanja).

4.3. Pregled odabranih istraživanja Markovljevih modela nakon globalne finansijske krize – kvalitativna analiza

Nakon globalne finansijske krize, kvalitativnim pristupom, autori zapažaju izuzetno veliki broj naučnih radova i publikacija u kojima se podrazumeva modifikacija modela koji se temelje na Markovljevim procesima a bili su korišćeni pre globalne finansijske krize. Paralelno s razvojem velikog broja složenih softverskih rešenja u ovoj oblasti dolazi i do promene u smislu shvatanja prirode samog rizika kojem se pristupa s mnogo većom pažnjom nakog finansijske krize. Takođe, najveći broj istraživanja podrazumeva korišćenje većeg broja modela predviđanja (komparativne analize), te na taj način ostvarenje veće pouzdanosti u analizi rezultata.

Data su četiri glavna doprinosa koji mogu poslužiti za razna predviđanja u sektoru finansija nakon globalne finansijske krize a podrazumevaju modifikacije određenih Markovljevih lanaca (Tenyakov, 2014, str. 171): (1) predviđanje fluktuacije cena robnih terminskih ugovora; (2) predviđanje nelikvidnosti putem OU-multivarijantnog modela (eng. *OU-multivariate model*) zahvaljujući kojem je utvrđeno da kriza 2008/2009. godine nije bila okidač za stvaranje režima nelikvidnosti, već je takav režim postojao dugo pre izbijanja krize; (3) implementaci-

ja strategije trgovanja podržana integracijom dva algoritma filtriranja, gde je pokazano da je u finansijskom sektoru moguće postići uspešno algoritamsko trgovanje; (4) modeliranje kretanja devizne stope za visokofrekventno trgovanje korišćenjem HMM modela pod okvirom bez kašnjenja (eng. *HMM under a zero-delay framework*).

Kritzman (2012) u svom istraživanju predstavlja HMM model sa dvema državama, u cilju predviđanja režima tržišne turbulencije, inflacije i indeksa industrijske proizvodnje. Nguien (2014) je koristio HMM model za predviđanje ekonomskih režima i cena akcija (HMM model, skriveni Markovljev model koji uvode Baum i Petrie 1966. godine; eng. *The Hidden Markov model is a stochastic signal model introduced by Baum and Petrie*). U jednom od poslednjih istraživanja sa ovom temom navodi se primena skrivenih Markovljevih modela za trgovinu akcijama, u smislu donošenja optimalnih investicionih odluka, promena cena akcija i sl. (Nguyen, 2018, str. 1).

Kada je reč o istraživanjima u Republici Srbiji, Kožul objašnjava Markovljev i Vinerov proces i osnove finansijskog kalkulusa u odnosu na prinos na investicije putem tržišne cene rizika, što dovodi do zaključka da su razlika između očekivanog prinosa na hartiju od vrednosti i bezrizična kamatna stopa povezane sa osnovnom volatilnošću, pri čemu investitori mogu da očekuju veće prinose za volatilnije finansijske instrumente kako bi oni ostali konkurentni na tržištu (Kožul, 2017). Kako se volatilnost prinosa na neki finansijski derivat bude povećavala tako će investitori zahtevati veću bezrizičnu kamatnu stopu na tržištu. Istraživanja o procesima i finansijskom modeliranju (Kožul, 2017, str. 60) možemo pronaći i u starijim izvorima: Harrison (1985), Hull (1997), Jarrow i Turnbull (1996), Kushner (1995), Musiela i Rutkowski (1997), Neftci (2000), Wilmot, Howison i Dewyanne (1995) i Wilmott (2007). Kod ovih autora istraživanja se uglavnom usmeravaju na prognoze finansijskih instrumenata, odnosno na prognoziranje kompleksnih finansijskih derivata (fjučersa, opcija i sl.).

Na osnovu primera koji smo naveli za primenu Markovljevih procesa na Beogradskoj berzi, zaključujemo da je istraživanje jasno identifikovalo nekoliko kompanija u koje je optimalno investirati od ukupno deset analiziranih. Takođe, od 2018. godine zakonodavni propisi (Zakon o računovodstvu RS, 2018) upućuju na primenu standarda

MSFI 9 – finansijski instrumenti (eng. *IFRS 9 Financial Instruments*), gde kompanije prilikom sastavljanja finansijskih izveštaja navode da pri određenim bilansnim pozicijama vrše predviđanja prema Markovljevom pristupu, o čemu će u nastavku biti reči (NBS i IFRS, 2019). Primenjena standarda *MSFI 9 – finansijski instrumenti* počela je 2018. godine za godišnje finansijske izveštaje.

4.4. Procena obezvređenja finansijskih sredstava – bankarski sektor

Kada je reč o analizama poslovanja u finansijskom sektoru i upravljanju rizicima kojima se posvećuje najviše pažnje, primenu Markovljevih procesa za predviđanje rizika koriste i razne banke i osiguravajuća društva u Republici Srbiji, uz jasnu naznaku koji model koriste (informacije uz zvanične napomene uz finansijske izveštaje). Kvalitetno finansijsko izveštavanje podrazumeva obelodanjivanje svih vrsta procena rizika, te obelodanjivanja bilansnih pozicija prema MRS (međunarodni računovodstveni standardi) i MSFI (međunarodni standardi finansijskog izveštavanja) (Babić, 2018, str. 18; i Babić, Petković, Romić, 2019, str. 3).

Primer 3 – Banka Intesa: Prilikom *lifetime* projekcije obezvređenja finansijskih sredstava, banka, po prethodno analiziranoj metodologiji, koristi upravo Markovljev pristup prilikom svojih internih prognoza. Različiti nivoi obezvređenja imaju za rezultat različite načine obračuna očekivanih kreditnih gubitaka:

Nivo 1: dvanaestomesečni očekivani kreditni gubici,

Nivo 2: 2 i 3 *lifetime* očekivani kreditni gubici.

Ovde primećujemo klasifikaciju, kao što smo u početnim tačkama rada klasifikovali nivoje potraživanja po ročnosti – do 30 dana; od 30 do 90 dana i one nenaplative. U kontekstu obračuna *lifetime* očekivanih kreditnih gubitaka, Banka je razvila metodologiju za utvrđivanje EAD-a (Exposure at Default) za sve periode do konačne ročnosti finansijskog instrumenta. Za proizvode koji se amortizuju i za koje su raspoloživi planovi otplate, budući EAD se utvrđuje na osnovu planova otplate. Za

ostale proizvode koristi se EAD na datum izveštavanja korigovan faktorima kreditne konverzije. Faktori kreditne konverzije, u zavisnosti od vrste proizvoda i segmenta, mogu biti regulatorni ili interno obračunati na osnovu istorijskih podataka o korišćenju raspoloživih limita. Kao osnova za obračun *lifetime* PD parametra korišćeni su postojeći (Basel II) PD modeli usklađeni sa zahtevima MSFI 9:

- Prelazak sa TTC (Through the cycle) na PIT (Point in time) koncept,
- Uvođenje koeficijentata (kao korekcije PD-a) koji odražavaju makroekonomski uticaj na parametar za buduće periode korišćenjem tri scenarija (najverovatniji, najpovoljniji, nepovoljan),
- *Lifetime* projekcija – korišćen je Markovljev pristup (Banca Intesa, 2018, str. 77).

Na sličan način, prognoze rizika u raznim segmentima vrše i druge banke: VTB banka (VTB banka, 2017), Direktna banka (Direktna banka, 2017) i sl.

4.5. Sektor osiguranja

Ekonomski razvoj u Republici Srbiji pratio je i razvoj tržišta osiguranja. Među najznačajnijim događajima su privatizacija državnih osiguravajućih društava, smanjenje prepreka trgovini i liberalizacija tržišta (Njegomir, Stojić, 2011). I ovaj sektor u savremenim tržišnim uslovima mora vršiti razna prognoziranja u oblasti upravljanja svojim rizicima i ono što je najkarakterističnije za sektor osiguranja jeste upravo upravljanje portfeljom. Posebna pažnja u novijim radovima posvećuje se proceni rizika koja zahteva sistematičan pristup u identifikovanju i analizi opasnosti. Zbog kompleksnosti i nepredvidivosti prirodnih i tehničko-tehnoloških opasnosti, različiti pristupi procene rizika i procene sistema predstavljaju sve veći izazov i nužnost u sferi upravljanja katastrofalnim rizicima, gde takođe nalazimo primene stohastičke analize i Markovljevog pristupa (Kerkez, Ivanović, 2016, str. 29–31). Isti slučaj je i u analizi promene rizičnosti portfelja u sektoru osiguranja (Rašeta, 2009, str 306).

5. Zaključak

U ovom radu su sa teorijskog aspekta, a potom i prema matematičkim izrazima analizirani opšti stohastički procesi, kao i Markovljevi modeli, kao poseban tip stohastičkih procesa. Nakon dobijenog metodološkog instrumentarijuma usledilo je obelodanjivanje i analiza odabranih postojećih kvantitativnih istraživanja iz ove oblasti, između ostalih: primena modela za određivanje stanja potraživanja u kompaniji i prognoza kretanja prinosa akcija Beogradske berze. Dalje, kvalitativnom analizom su predstavljena i odabrana istraživanja Markovljevih modela nakon globalne finansijske krize, zatim primena Markovljevih procesa u proceni obezvređenja finansijskih sredstava u bankarskom sektoru, kao i u sektoru osiguranja. Ono što ovih istraživanjem možemo zaključiti je da su Markovljevi modeli temeljan instrumentarijum mnogih modifikovanih modela u predviđanju budućih događaja. Takvi modeli su izuzetno značajni, kada su u pitanju predviđanja u kratkom roku i izuzetno su jednostavni za primenu. Nedostatak primene ovih modela može biti taj što Markovljev model ne opisuje rizik od ulaganja u pojedine akcije kompanija, a s druge strane njihova primena može biti izuzetno značajna prilikom komparativne analize sa nekim drugim modelima u svrhu provere rezultata predviđanja i sl. Kao što smo i prikazali, bez obzira na to koji sektor privrede je u pitanju, Markovljevi modeli su značajni za sve kompanije, odnosno nalaze široku primenu u oblasti finansija. Ovaj rad ne donosi inovativne rezultate, već na jedan pregledan i sistematičan način prikazuje ključni instrumentarijum iz ove oblasti. Cilj rada je bio da sistematično prikaže ključne segmente modela upravljanja rizikom kada su, od mnoštva mogućih, temelj Markovljevi procesi i primene u oblasti finansija. Identifikovana je primena navedenih procesa i modela u ovoj oblasti, što otvara mogućnost širih empirijskih istraživanja.

Literatura

- Alexander, C. (2008). *Quantitative Methods in Finance*. John Wiley & Sons Inc., USA. Preface to Volume I, 1. (Link: <https://www.pdfdrive.com/market-risk-analysis-quantitative-methods-in-finance-d5943149.html>, dostupno dana: 26. 04. 2019. godine), str. 1.
- Babić, N. (2018). *Karakteristike i značaj računovodstvenih politika segmenata izveštavanja na primeru dva entiteta*. Deo: *Finansijsko izveštavanje u Republici Srbiji*. Ekonomski fakultet u Subotici, Univerzitet u Novom Sadu. Master rad, *neobjavljen rad.*, str. 18.
- Babić, N., Petković, Đ., Romić, L. (2019). *Savremeni računovodstveni aspekti poslovnog odlučivanja u strategijskom menadžmentu*. Deo: Uvod. XXIV Internacionalni naučni simpozijum Strategijski menadžment i sistemi podrške odlučivanju u strategijskom menadžmentu. Subotica, Republika Srbija, str. 5.
- Babić, N., Petković, Đ., Romić, L. (2019). *Karakteristike i značaj računovodstvenih politika segmenata izveštavanja*. Deo: *Finansijsko izveštavanje u Republici Srbiji*. Međunarodni naučni simpozijum EkonBiz 2019, Bijeljina, str. 3.
- Backović, M., Vuleta, J., Popović, Z. (2012). *Ekonomsko matematički metodi i modeli*. Ekonomski fakultet Beograd. Beograd, str. 597–610.
- Banka Intesa. (2018). *Zvanični finansijski izveštaj za 2018. godinu*. Napomene uz finansijske izveštaje (Link: https://www.bancaintesa.rs/uploads/BANCA_INTESA_Izvestaj_revizora_i_Pojedinacni_finansijski_izvestaji_2018_final.pdf, dana: 25. 05. 2019. godine), str. 77.
- Basharin, G., Langville, A., Naumov, V. (2004). *The life and work of A.A. Markov*. Linear Algebra and its Applications Volume 386, 15, Pages 3–26. USA. (Link: http://www.meyn.ece.ufl.edu/archive/spm_files/Markov-Work-and-life.pdf, dostupno dana: 20. 04. 2019. godine), str. 13.
- Bäuerle, N., Rieder. U. (2011). *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York. (Link: http://www.smv.gob.pe/Biblioteca/temp/catalogacion/Markov_Decision_Processes.pdf, dostupno dana: 20. 03. 2019. godine), str 15.
- Beasley, J. (2019). *Markov processes examples*. Societies – UK and USA. (Link: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/moremk.html>, dostupno dana: 07. 04. 2019. godine), str. 1-9.
- Capinski, M., Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag London Limited. United States of America. (Link: <http://poincare.matf.bg.ac.rs/~kmljan/UFM.pdf>, dostupno dana: 20. 03. 2019. godine), str. 91.
- Direktna banka. (2017). *Zvanični finansijski izveštaj za 2017. godinu*. Napomene uz finansijske izveštaje, deo: Upravljanje rizikom. (Link: <https://www.direktnabanka.rs/uploads/main/financial-reports/Finansijski%20izve->

- s%CC%8Ctaji%2031.12.2017.godine%20i%20izves%CC%8Ctaj%20 nezavisnog%20revizora.pdf , dostupno dana: 22. 03. 2019. godine).
- Dunbar, S. (2011). *Mathematical Modeling in Finance with Stochastic Processes*. (Link:http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/MathematicalFinance/Lessos/Book/BookMaster/mathfinance_book.pdf , dostupno dana: 17. 04. 2019. godine), str. 8.
- Fabris, N. (2018). *Jesenje zasedanje MMF-a*. Gostujuće predavanje na Ekonomskom fakultetu u Subotici, Univerzitet u Novom Sadu. Beleške autora, *neobjavljen rad*.
- Hess S. (2004). *Stohastički modeli u upravljanju lučkim sustavom*. Sveučilište u Rijeci, Pomorski fakultet u Rijeci, Rijeka. (Link: <https://svkri.uniri.hr/files/DUF-587.pdf> , dostupno: 20. 03. 2019. godine), str. 29–35; 37.
- Hess, S., Fabian, A., Hess, M. (2008). *O problemima modeliranja prometnih sustava u svrhu praćenja uspešnosti poslovanja*. Časopis: Pomorstvo, Vol. 22 No. 2. Rijeka. (Link:<https://hrcak.srce.hr/31007> , dostupno dana: 28. 03. 2019. godine), str. 159.
- Hilgers, P., Langville, A. (2006). *The five greatest applications of Markov Chains. The Five Greatest Applications of Markov Chains*. Proceedings of the Markov Anniversary Meeting. Bosen Press. (Link: <http://langvillea.people.cofc.edu/MCapps7.pdf> , dostupno dana: 03. 04. 2019. godine), str. 1–14.
- IFRS. *IFRS 9 – Financial Instruments*. Deloitte. (Link: <https://www.iasplus.com/en/standards/ifrs/ifrs9> , dostupno dana: 03. 06. 2019. godine), str. 1–3.
- Janićijević, I. (2016). *Utvrdjivanje uticaja ulaznih elemenata procesa na kvalitet proizvoda, usluga i softvera*. Univerzitet Singidunum, Beograd., str. 102.
- Kenton, W. (2018). *Markov Analysis*. (Link: <https://www.investopedia.com/terms/m/markov-analysis.asp> , dostupno dana: 20.04.2019. godine).
- Kerkez, M., Ivanović, I. (2016). *Katastrofalni rizici i osiguranje*. Megatrend revija, Beograd. Vol. 13, № 2. (Link: <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/1820-3159/2016/1820-31591602017K.pdf> , pristupljeno dana: 21. 04. 2019. godine), str. 29–31.
- Knill, O. (2009). *Probability Theory and Stochastic Processes with Applications*. Overseas Press India Private Limited (Link: <http://www.math.harvard.edu/~knill/books/KnillProbability.pdf> , dostupno dana: 29. 04. 2019. godine), str. 16.
- Kožul, N. (2017). *Tržišna cena rizika*. Časopis Bankarstvo, 2017, vol. 46, br. 1, UBS, Beograd. (<http://www.ubs-asb.com/Portals/0/Casopis/2017/1/Bankarstvo-1-2017-Kozul.pdf> , dana: 17. 02. 2019. godine), str. 64–65.
- Kritzman, M., Page, P., Turkington, D. (2012). *Regime Shifts: Implications for Dynamic Strategies*. Financial Analysts Journal 68, str. 22–39 (Link: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2064801 , dostupno: 21. 05. 2019. godine).

- Levin, D., Peres, Y., Wilmer, E., (2008). *Markov Chains and Mixing Times*. AMS, USA. American Mathematical Society.
- (Link:<https://books.google.rs/books?id=6Cg5Nq5sSv4C&pg=PA34&dq=Markov%27s+transitive+matrix+%CE%A1%3D&hl=en&sa=X&ved=0ahUKewj-vNKz5djiAhVhsYsKHZLbAs4QuwUILDAA#v=onepage&q=Markov's%20transitive%20matrix%20%CE%A1%3D&f=false>, dostupno dana: 21. 03. 2019. godine), str. 47–60.
- MSFI 9 – Finansijski instrumenti. (Link: <https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-9-financial-instruments/> , dostupno dana: 21. 04. 2019. godine).
- Myers, D., Wallin, L., Wikström, P. (2017). *An introduction to Markov chains and their applications within finance*. Mathematical Sciences - Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, Sweden
- (Link: <http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/CTH/mve220/1617/readingprojects16-17/IntroMarkovChainsandApplications.pdf> , dostupno dana: 21. 03. 2019. godine), str. 1–8.
- NBS. Narodna Banka Srbije. (2019). *Implementacija MSFI 9 u bankama*. (Link: https://www.nbs.rs/internet/latinica/55/55_10/index.html , dostupno dana: 01. 06. 2019. godine), str 1.
- Nedeljković, J. (2011). *Uopštteni stohastički procesi*. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.
- (Link:http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/primenjena_matematika/JelenaNedeljkovic.pdf, dostupno dana: 20. 04. 2019. godine), str.11.
- Nguyen Nguyet Thi. (2014). *Probabilistic Methods in Estimation and Prediction of Financial Models*. PhD thesis, Florida State University, Tallahassee, FL, USA, str. 27. (Link: <http://fsu.digital.flvc.org/islandora/object/fsu%3A254481> , dostupno: 21. 05. 2019. godine).
- Nguyen, N. (2018). *Hidden Markov Model for Stock Trading*. Department of Mathematics & Statistics at Youngstown State University, 1 University Plaza, Youngstown, OH 44555, USA. Int. J. Financial Stud. 2018, 6, 36 (Link: <https://www.mdpi.com/2227-7072/6/2/36> , dostupno dana: 21. 05. 2019. godine).
- Njegomir, V., Stojić, D. (2011). *Liberalisation and Market Concentration Impact on Performance of the Non-Life Insurance Industry: The Evidence from Eastern Europe*. The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice January 2011, Volume 36, Issue 1, pp 96 (Link: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1057%2Ffgpp.2010.32.pdf> , dostupno dana: 21. 04. 2019. godine).
- Pardoux, E. (2008). *Markov Processes and Applications. Algorithms, Networks, Genome and Finance*. (Link:https://doc.lagout.org/science/0_Computer%20Science/2_Algorithms/Markov%20Processes%20and%20Applications_%20Algorithms%2C%20Networks%20Genome%20

- and%20Finance%20%5BPardoux%202009-01-07%5D.pdf, dostupno dana: 19.03.2019. godine), str. 17.
- Petković, N. (2016). *Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa*. Beograd. (Link:<http://fmz.edu.rs/novi/download/disertacije/2016/Nina%20Petkovic/Disertacija%20Nina.pdf> , dana: 25. 03. 2019. godine), str. 43–60.
- Petković, N., Božinović, M., Stojanović, S. (2018). Optimizacija portfolija primenom Markovljevihi lanaca. Časopis, Anali Ekonomskog fakulteta u Subotici, Subotica, str. 2–11.
- Pukite, J. Pukite, P. (1998). *Modeling for reliability analysis: Markov modeling for reliability, maintainability, safety and supportability analyses of complex systems*. IEEE Press, Inc., New York, str. 198–211.
- Rašeta, J. (2009). *Finansijska i aktuarska matematika*. Beograd (Link: <https://vdocuments.site/us-finansijska-i-aktuarska-matematika.html> , dostupno dana: 21. 04. 2019. godine), str. 298. i 306.
- Seneta, E. (2006). *Markov and the creation of Markov chains*. School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, NSW, Australia. (Link: <http://www.maths.usyd.edu.au/u/eseneta/senetamcfinal.pdf> , dostupno dana: 28. 05. 2019. godine), str. 9–13.
- Stanojević, S., Đorđević, N., Volf, D. (2017). *Primena kvantitativnih metoda u predviđanju poslovanja privrednih društava*. Beograd, Oditor-časopis za Menadžment, finansije i pravo 3 (1), 92-101, str. 92, (Link: <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/2217-401X/2017/2217-401X1701092S.pdf> , dana: 18. 02. 2019. godine).
- Teall, J., Hasan, I. (2002). *Quantitative methods for finance and investments*. (Link:<https://books.mec.biz/tmp/books/TPMYHLYLPLCGGS6V1726.pdf> , dostupno dana: 19. 04. 2019. godine), str. 2.
- Tenyakov, A. (2014). *Estimation of Hidden Markov Models and Their Applications in Finance*. The University of Western Ontario. (Link: <https://ir.lib.uwo.ca/cgi/viewcontent.cgi?article=3670&context=etd> , dostupno dana: 21. 03. 2019. godine), str. 171.
- Ulm University. (2019). *General theory of stochastic processes*. Department of Mathematics. Germany. (Link: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik_II/Skript_1.pdf , dostupno dana: 21. 03. 2019. godine), str. 1–11.
- VTB banka. (2017). *Zvanični finansijski izveštaj za 2017. godinu*. Napomene uz finansijske izveštaje, deo: Upravljanje rizikom. (Link: https://www.apibank.rs/wp-content/uploads/2017/05/VTB-Banka_Finansijski-izvestaji-za-2017.-godinu.pdf , dana: 21. 03. 2019. godine).
- Zakon o računovodstvu*. (“Sl. glasnik RS”, br. 62/2013 i 30/2018), (Link: https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_racunovodstvu.html , dostupno dana: 03. 06. 2019. godine), str. 1–3, član 1–3.